Barème : 5 points par question.

1 Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe exactement deux nombres complexes z tels que $z^2 = a$.

Solution : En écrivant sous forme polaire $a = re^{i\theta}$, on voit que $z_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = -z_0$ sont deux solutions distinctes. Montrons que ce sont les seules : si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$ alors en soustrayant l'égalité $z_0^2 = a$ en obtient $z^2 - z_0^2 = 0$ soit $(z - z_0)(z + z_0) = 0$ d'où on déduit que $z = z_0$ ou $z = -z_0$.

2 Donner les racines carrées de $2i - 5$.

Solution On cherche une racine carrée sous la forme $(a + ib)$ avec a et b réels, et l'équation $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$ nous amène donc à résoudre le système

$$a^2 - b^2 = -5$$
$$2ab = 2$$

A ce stade, en posant avec la deuxième équation $b = \frac{1}{a}$, et en la réinjectant dans la première, on peut résoudre le problème. Ou on peut avoir recours à "l'astuce" déjà vue en TD : si $(a+ib)^2 = 2i-5$, en considérant les modules, on a $a^2+b^2 = \sqrt{29}$. En additionnant cette égalité avec le première de celle ci-dessus , on a :

$2a^2 = \sqrt{29} - 5 \ \Rightarrow a = +/-\frac{\sqrt{\sqrt{29}-5}}{\sqrt{2}}$.

Si par exemple on prend $a = \frac{\sqrt{\sqrt{29}-5}}{\sqrt{2}}$, finalement on a $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{29}-5}} = \frac{\sqrt{\sqrt{29}+5}}{\sqrt{2}}$ en multipliant en bas par $\sqrt{\sqrt{29}+5}$. Cela nous donne donc $z = \frac{\sqrt{\sqrt{29}-5}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{\sqrt{29}+5}}{\sqrt{2}}$. L'autre racine est $-z$.

3 soit $u = (-2, 1, 0)$, $v = (3, 0, 1)$ et $w = (1, 1, t)$ où $t \in \mathbb{R}$. Pour quel(s) t ces trois vecteurs sont liés ?

Solution : On se demande s'il existe un triplet non nul (a, b, c) tel que $au + bv + cw = 0$ (Il y a ici l'abus de notation, consistant à écrire 0 à la place de $(0, 0, 0)$). On obtient le système :

$$\begin{array}{rrrl} -2a & +3b & +c & = 0 \\ a & & +c & = 0 \\ & b & +tc & = 0 \end{array}$$

On additionne deux fois la première ligne à la deuxième pour y faire disparaître a :

$$\begin{array}{rrrl} & 3b & +3c & = 0 \\ a & & +c & = 0 \\ & b & +tc & = 0 \end{array}$$

Puis on intervertit des lignes pour se faciliter la vie :

$$\begin{array}{lllr} a & & +c & = 0 \\ & b & +tc & = 0 \\ & 3b & +3c & = 0 \end{array}$$

Enfin, on multiplie la deuxième ligne par -3 puis on l'ajoute à la troisième pour y faire se volatiliser b :

$$\begin{array}{llr} a & +c & = 0 \\ b & +tc & = 0 \\ & 3c(1-t) & = 0 \end{array}$$

On se rend compte que si $(1-t) \neq 0$ la seule solution du système (par rapport aux variables a, b et c) est $(0,0,0)$, et que donc les vecteurs sont libres. En revanche, si $t = 1$, le système a des solutions non nulles : par exemple en prenant $c = 1$ on doit avoir $b = -1$ et $a = -1$ et en effet pour $t = 1$ on a
$-u - v + w = -(-2,1,0) - (3,0,1) + (1,1,1) = (0,0,0)$.

4 (a) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation parametrique

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 1 - t \end{aligned}$$

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

(b) Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équation parametrique

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 2 + 2t \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont-elles des points en commun ? (dit autrement, a-t-on $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$?)

Solution : Pour trouver l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ comme $t = x - 2$ les égalités correspondant à y et z donnent

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0 \\ x + z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi un point de $\mathcal{D}'$ étant de la forme $(2t, 1-t, 2+2y)$ s'il appartenait aussi à $\mathcal{D}$ devrait aussi vérifier son équation cartésienne, à savoir :

$$\begin{aligned} 2(2t) - (1-t) - 1 &= 0 \\ 2t + 2 + 2t - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui aboutit à $t = \frac{2}{5}$ et $t = \frac{1}{4}$, ce qui est impossible, donc les deux droites n'ont pas de point commun.